Differentiaaliyhtälöt — reuna-arvotehtävät

Tunnetaan ratkaistavan funktion arvot välin molemmissa päissä. Esimerkiksi tähtimallissa tähden massajakauma: $M(0) = 0$, $M(R) = m$, missä $M(r)$ on säteen r sisäpuolella olava massa ja m tähden kokonaismassa.

Alkuarvotehtävällä on yleensä yksikäsitteinen ratkaisu, jos siinä esiintyvät funktiot ovat riittävän siistejä.

Reuna-arvotehtävällä ei välttämättä ole lainkaan ratkaisua, tai ratkaisuja voi olla äärettömän monta.

Tähtäysmenetelmä

Tunnetaan esimerkiksi funktion arvot välin alku- ja päätepisteessä, mutta ei sen derivaattaa. Jotta alkuarvotehtävien ratkaisumenetelmiä voisi käyttää, täytyisi tietää derivaatan arvo välin alkupäässä. Kokeillaan erilaisia derivaatan arvoja, kunnes ratkaisu saadaan kulkemaan myös välin päätepisteen kautta.

Tarkastellaan yhtälöä

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta.$$

Muunnetaan tämä alkuarvotehtäväksi

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = k.$$

Tämän ratkaisu riippuu tähtäyskulmasta k:

$$y = y(x; k).$$

On siis ratkaistava k ehdosta

$$y(b; k) = \beta.$$

Kyseessä on yhtälö, joka voidaan periaatteessa ratkaista millä tahansa numeerisella menetelmällä. Kutakin funktion arvon laskemista vastaa nyt differentiaaliyhtälön yhden ratkaisun laskeminen.

Lasketaan ensin kaksi ratkaisua k:n arvoilla k_0 ja k_1. Tulosta voidaan tarkentaa esimerkiksi sekanttimenetelmällä:

$$k_2 = k_1 - (y(b; k_1) - \beta)\frac{k_1 - k_0}{y(b; k_1) - y(b; k_0)},$$

Esimerkki: Ratkaistaan yhtälö $y'' + y = 0$ reunaehdoilla $y(0) = 1$, $y(1) = 1$. (Tarkka ratkaisu on $0.5463 \sin x + \cos x$.)

Lasketaan esimerkiksi 4. kertaluvun Runge-Kutta-menetelmällä.

Kokeillaan ensin $y'(0) = k_0 = 0$:

```
0.100000 0.995004
0.200000 0.980067
   ...
0.800000 0.696707
0.900000 0.621611
1.000000 0.540303
```

Toinen yritys $y'(0) = k_1 = 1$:

```
0.100000 1.094837
0.200000 1.178736
   ...
0.800000 1.414063
0.900000 1.404937
1.000000 1.381773
```

Korjattu kulmakertoimen arvo:

$$y'(0) = k_2 = 1 - (1.381773 - 1)\frac{1 - 0}{1.381773 - 0.540303} = 0.5463.$$

Ratkaisu alkuarvolla $y'(0) = k_2 = 0.5463$:

```
0.100000 1.049543
0.200000 1.088600
   ...
0.800000 1.088599
0.900000 1.049542
1.000000 0.999998
```

Tarkkuus ei ole yhteensattuma: toisen kertaluvun lineaarisen reuna-arvotehtävän ratkaisu saadaan aina em. tavalla kahden ratkaisun avulla.

Differenssimenetelmä

Korvataan derivaatat differensseillä:

$$\begin{aligned} y'(x_i) &\approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \\ y''(x_i) &\approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}. \end{aligned}$$

Esimerkiksi yhtälö $y'' + y = 0$:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + y_i = 0$$

eli

$$y_{i-1} + (h^2 - 2)y_i + y_{i+1} = 0.$$

Reuna-arvoista saadaan lisäksi

$$y_0 = 1, \qquad y_n = 1.$$

Kun askel on $h = 0.25$, saadaan yhtälöt

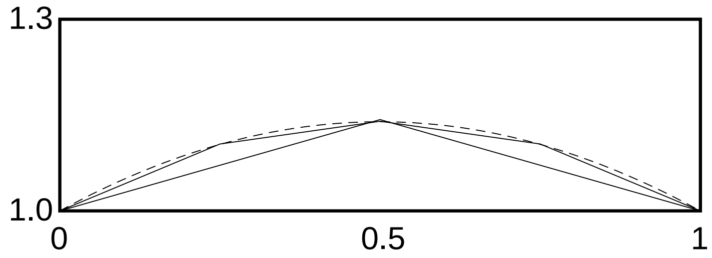
$$\begin{aligned} y_0 &= 1, \\ y_0 - 1.9375y_1 + y_2 &= 0, \\ y_1 - 1.9375y_2 + y_3 &= 0, \\ y_2 - 1.9375y_3 + y_4 &= 0, \\ y_4 &= 1 \end{aligned}$$

eli

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1.9375 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1.9375 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1.9375 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Yhtälöryhmän ratkaisu on

x	y	y(tarkka)
0.0000	1.0000	1.0000
0.2500	1.1047	1.1041
0.5000	1.1403	1.1395
0.7500	1.1047	1.1041
1.0000	1.0000	1.0000



Lineaarinen differentiaaliyhtälö korvataan lineaarisella yhtälöryhmällä, jonka kerroinmatriisi on nauhamatriisi, edellä tridiagonaalinen matriisi. Tilaa voidaan säästää tallettamalla vain lävistäjän suuntaiset nollasta poikkeavat vinorivit.

Yleensä voidaan käyttää normaalia Gaussin eliminointia. Kukin muuttuja eliminoidaan vain kahdesta yhtälöstä, joten laskenta-aika $\propto n$.

Jos askel on lyhyt, yhtälöiden määrä voi olla hyvin suuri, mikä voi aiheuttaa pyöristysvirheiden kasaantumista. Jos kerroinmatriisi on diagonaalidominantti, iteratiiviset menetelmät ovat käyttökelpoisia.

Tarkkuutta voidaan parantaa

- Lyhentämällä askelta
- Käyttämällä derivaatoille korkeamman kertaluvun approksimaatioita; tällöin kerroinmatriisin nauhanleveys kasvaa.

Jos alkuperäinen yhtälö on epälineaarinen, tuloksena on epälineaarinen yhtälöryhmä, jota voi yrittää ratkaista iteroimalla. Vaikeutena on riittävän hyvän alkuarvon löytäminen, jotta ratkaisu suppenisi. Jos konvergoivaa ratkaisua ei löydy, kannattaa yrittää tähtäysmenetelmällä.

Reuna-arvoina voivat olla myös derivaatan arvot.

Esimerkiksi yhtälö $y'' + y = 0$, reuna-arvot $y'(0) = 0$, $y'(1) = 0.5$. (Tarkka ratkaisu on $y = -0.5942 \cos x$, jolloin $y(1) = -0.3210$.)

Kun askel on $h = 0.25$, saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned}
y_{-1} - 1.9375 y_0 + y_1 &= 0, \\
y_0 - 1.9375 y_1 + y_2 &= 0, \\
y_1 - 1.9375 y_2 + y_3 &= 0, \\
y_2 - 1.9375 y_3 + y_4 &= 0, \\
y_3 - 1.9375 y_4 + y_5 &= 0,
\end{aligned}$$

y_{-1} ja y_5 ovat tarkasteltavan välin ulkopuolella.

Reunaehdoista saadaan lisäksi

$$\begin{aligned}
y'(0) &= \frac{y_1 - y_{-1}}{0.5} = 0, \\
y'(1) &= \frac{y_5 - y_3}{0.5} = 0.5,
\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}
-1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & -1.9375 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -1.9375 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1.9375 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & -1.9375 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1.9375 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Ratkaisu on

$$y = \begin{pmatrix} -0.5792 \\ -0.5979 \\ -0.5792 \\ -0.5243 \\ -0.4367 \\ -0.3217 \\ -0.1867 \end{pmatrix}.$$