

Osittaisdifferentiaaliyhtälöt

Kaikki edellä esiintyneet yhtälöt ovat *tavallisia differentiaaliyhtälöitä*. Kahden tai useamman muuttujan yhtälö, joka sisältää osittaisderivaattoja, on *osittaisdifferentiaaliyhtälö*.

Hyvin monia ilmiöitä voidaan kuvata toisen kertaluvun lineaarisilla yhtälöillä

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0.$$

Tällainen yhtälö on jotakin kolmesta tyypistä riippuen toisten derivaattojen kertoimista:

- 1 Elliptinen, jos $b^2 - 4ac < 0$.
- 2 Parabolinen, jos $b^2 - 4ac = 0$.
- 3 Hyperbolinen, jos $b^2 - 4ac > 0$.

Jaottelulla ei sinänsä suurta merkitystä numeriikan kannalta, mutta:

- Hyperboliset ja paraboliset yhtälöt kuvaavat usein jonkin ajallista kehitystä, ja ovat siten alkuarvotehtäviä
- Elliptiset yhtälöt kuvaavat usein ”staattista” tilannetta, jolla on tietyt reuna-arvot.

Tärkeimmät ratkaisumenetelmät:

- differenssimenetelmät
- elementtimenetelmät

Yksinkertainen osittaisdifferentiaaliyhtälö on esimerkiksi Laplacen yhtälö, joka suorakulmaisessa koordinaatistossa on

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Laplacen yhtälössä $a = c = 1$ ja $b = 0$, joten $b^2 - 4ac = -4$, ja kyseessä on siis elliptinen yhtälö.

Jos oikea puoli ei ole nolla, saadaan Poissonin yhtälö

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

Esimerkiksi gravitaatiopotentiaali V toteuttaa Poissonin yhtälön

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \nabla^2 V = -4\pi G\rho(x, y, z),$$

missä ρ on tiheys ja G gravitaatiovakio.

Elliptiset yhtälöt kuvaavat usein ajasta riippumatonta potentiaalia tai tasapainossa olevaa systeemiä.

Differenssimenetelmä/elliptiset yhtälöt

Korvataan osittaisderivaatat äärellisillä differensseillä:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial x} &= \frac{u(x_{i+1}, y_j) - u(x_{i-1}, y_j)}{2\Delta x}, \\ \frac{\partial u(x_i, y_j)}{\partial y} &= \frac{u(x_i, y_{j+1}) - u(x_i, y_{j-1})}{2\Delta y}, \\ \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} &= \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{(\Delta x)^2}, \\ \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial y^2} &= \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{(\Delta y)^2}.\end{aligned}$$

Merkitään $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$ ja valitaan askel samaksi molemmissa suunnissa, $h = \Delta x = \Delta y$, jolloin

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial x^2} &= \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 u_{i,j}}{\partial y^2} &= \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}.\end{aligned}$$

Laplacen yhtälö on nyt

$$\nabla^2 u_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = 0$$

eli

$$\frac{1}{h^2}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}) = 0.$$

Laplacen operaattori voidaan esittää kaaviona

$$\nabla^2 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & 1 & & \\ 1 & -4 & 1 & \\ & & 1 & \end{bmatrix}.$$

Yhdeksän pisteen menetelmä:

$$\nabla^2 = \frac{1}{6h^2} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kolmiulotteisessa tapauksessa esimerkiksi:

$$\nabla^2 = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & \end{bmatrix}.$$

Tylsä vakioesimerkki: suorakaiteen muotoinen levy, jonka yksi reuna pidetään 100 asteen lämpötilassa ja muut reunat 0 asteessa.

Dirichlet'n reunaehto: ratkaistavan funktion arvo tunnetaan koko ratkaisualueen reunalla.

Käytetään vain kolmea hilapistettä:

$$\begin{array}{cccccc} & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & u_1 & u_2 & u_3 & 100 & \\ & 0 & 0 & 0 & & \end{array}$$

Lasketaan Laplacen operaattori kussakin hilapisteessä:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2}(0 + 0 + u_2 + 0 - 4u_1) &= 0 \\ \frac{1}{h^2}(u_1 + 0 + u_3 + 0 - 4u_2) &= 0 \\ \frac{1}{h^2}(u_2 + 0 + 100 + 0 - 4u_3) &= 0 \end{aligned}$$

eli

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

Tiheämpi hila voisi olla

$$\begin{array}{cccccc}
 u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\
 u_7 & u_8 & u_9 & u_{10} & u_{11} & u_{12} \\
 u_{13} & u_{14} & u_{15} & u_{16} & u_{17} & u_{18}
 \end{array}$$

Kun hilapisteitä on paljon, kerroinmatriisi on seuraavantapainen:

$$\begin{array}{cccccccc}
 \dots & & & & & & & \\
 1 & & & 1 & -4 & 1 & & 1 \\
 & 1 & & & 1 & -4 & 1 & & 1 \\
 & & 1 & & & 1 & -4 & 1 & & 1 \\
 \dots & & & & & & & & &
 \end{array}$$

Mitä enemmän hilapisteitä on, sitä pienempi osuus kerroinmatriisin alkioista on nolasta poikkeavia.

Eliminoinnissa matriisin vinorivien väliselle alueelle muodostuu nolasta poikkeavia alkioita.

Jos pisteitä on paljon, on edullista käyttää iteratiivisia ratkaisumenetelmiä, jolloin em. tapauksessa tarvitsee tallettaa vain matriisin viisi vinoriviä.

Liebmannin iteraatio

Yhtälöryhmä

$$\begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

kirjoitetaan muotoon, jossa vasemmalla puolella ovat alkuperäisen yhtälöryhmän diagonaali-alkiot:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{u_2}{4}, \\ u_2 &= \frac{u_1 + u_3}{4}, \\ u_3 &= \frac{u_2 + 100}{4}. \end{aligned}$$

Näillä iteraatiokaavoilla päivitetään ratkaisuvektoria u , kunnes ratkaisu ei enää muutu vaadittua tarkkuutta enempää. Iterointi lopetetaan esim., kun suurin u :n alkoiden muutoksista on riittävän pieni.

Laplace-operaattorin kaaviosta saadaan suoraan iteraatioon sopivat kaavat:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} u_{ij} = 0,$$

josta

$$u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i,j+1} + u_{i,j-1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j}).$$

Alkuarvo voidaan laskea esimerkiksi ratkaisemalla yhtälö hyvin karkealla hilalla. Ratkaisun avulla interpoloidaan likimääräiset arvot tiheämmän hilan pisteissä.

Liebmannin iteraation suppeneminen voi olla hidasta. Suppenemista voi kiihdyttää ylirelaksaatiomenetelmällä.

Merkitään yläindeksiksi iteraatiokierros, jolla arvo on laskettu:

$$u_{ij}^{k+1} = \frac{1}{4}(u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k).$$

Lisätään ja vähennetään u_{ij}^k :

$$u_{ij}^{k+1} = u_{ij}^k + \left(\frac{u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k - 4u_{ij}^k}{4} \right).$$

Sulkulauseke on korjaus, jolla u_{ij} :tä päivitetään. Kun ratkaisu on löytynyt, sulkulauseke on nolla.

Korjaus on usein liian pieni, joten u :n arvot lähestyvät hitaasti oikeaa ratkaisua. Suppeneminen nopeutuu, jos korjaustermiä suurennetaan sopivasti:

$$u_{ij}^{k+1} = u_{ij}^k + \omega \left(\frac{u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^{k+1} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i+1,j}^k - 4u_{ij}^k}{4} \right).$$

Vakio ω on välillä $[1, 2]$. Kun pisteiden määrä kasvaa hyvin suureksi, optimaalinen arvo $\rightarrow 2$.

(Suorakulmaisen hilan ja Dirichlet'n reunaehtojen tapauksessa optimaalinen arvo on

$$\omega = \frac{4}{2 + \sqrt{4 - c^2}},$$

missä

$$c = \cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{\pi}{m},$$

ja n ja m ovat hilapisteiden määrä x - ja y -suunnissa.)

Differenssimenetelmät/paraboliset yhtälöt

Esimerkki: diffuusioyhtälö

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

alkuehdolla $u(x, t = 0) = g(x)$ ja reunaehdoilla $u(x = 0, t) = a$,
 $u(x = 1, t) = b$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{1}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k), \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{\Delta t}(u_i^{k+1} - u_i^k).\end{aligned}$$

Diskretoitu yhtälö

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{c\Delta t}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k).$$

Oikean puolen termi u_i^k häviää, kun $2c\Delta t/h^2 = 1$. Voidaan osoittaa, että tästä saadaan raja stabiilisuudelle. Jotta yhtälö olisi stabiili, on oltava $2c\Delta t/h^2 < 1$. Jos siis pituusaskelta lyhennetään, on samalla lyhennettävä aika-askelta.

Menetelmä on eksplisiittinen: kullakin aika-askelella tarvitaan vain edellisellä aika-askelella laskettuja arvoja. Virhe on $\mathcal{O}(\Delta t) + \mathcal{O}(h^2)$.

Implisiittiset menetelmät ovat ajan suhteen tarkempia. Esimerkiksi Crank-Nicholsonin menetelmä:

$$u_i^{k+1} = u_i^k + \frac{c\Delta t}{2h^2}(u_{i+1}^{k+1} - 2u_i^{k+1} + u_{i-1}^{k+1} + u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k).$$

Virhe on $\mathcal{O}((\Delta t)^2) + \mathcal{O}(h^2)$, ja menetelmä on stabiili kaikilla Δt .

Haittapuoli on, että kutakin aika-askelta kohti joudutaan ratkaisemaan tridiagonaalinen yhtälöryhmä.

Differenssimenetelmät/hyperboliset yhtälöt

Esimerkiksi aaltoyhtälö

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Diskretoimalla saadaan

$$\frac{u_i^{k+1} - 2u_i^k + u_i^{k-1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k}{h^2}$$

eli

$$u_i^{k+1} = 2u_i^k - u_i^{k-1} + \frac{c^2(\Delta t)^2}{h^2}(u_{i+1}^k - 2u_i^k + u_{i-1}^k).$$

Jos aika-askel valitaan siten, että $c\Delta t = h$, saadaan

$$u_i^{k+1} = -u_i^{k-1} + u_{i+1}^k + u_{i-1}^k.$$

Yhtälö voi kuvata esimerkiksi värähtelevää kieltä. Alkuarvoina tarvitaan poikkeamat alkuhetkellä, u_i^0 , ja nopeus, josta voidaan laskea u_i^1 .

Elementtimenetelmät

FEM = Finite Element Method

Käytetään erityisesti rakenneanalyysissä ja virtausmekaniikassa.

- Jaetaan käsiteltävä alue pieniin elementteihin. (Verkon generointi)
- Kunkin elementin alueella kuvataan ratkaisua yksinkertaisen kantafunktion (esim. polynomin) avulla. Kukin kantafunktio on nolosta poikkeava vain pienellä alueella.
- Yhtälön ratkaisu saadaan kantafunktioiden lineaarikombinaationa.
- Kantafunktiot muodostetaan niin, että kahden elementin rajalla molemmat kantafunktiot saavat samat arvot elementtien solmupisteissä (esimerkiksi kolmikulmaisen elementin kärjissä). Lisäksi voidaan vaatia, että myös derivaatoilla on samat arvot solmupisteissä.
- Kantafunktioiden kertoimet saadaan optimointitehtävän ratkaisuna. Ratkaisun laskeminen johtaa (yleensä suureen) lineaariseen yhtälöryhmään.

Elementtien muodot ja koot voidaan valita melko vapaasti tehtävän mukaan. Menetelmää on helppo soveltaa myös tilanteisiin, joiden geometria on mutkikasta.

Elementtien kokoa voidaan helposti pienentää kriittisissä kohdissa.

Kysymyksessä on minimointitehtävä, joka on yleensä aina ratkaistavissa. Menetelmä on stabiilimpi kuin differenssimenetelmät.

Funktionaali

$$F[v] = \int v(x, y, y') dx$$

saa ääriarvon, kun v toteuttaa Lagrangen yhtälön

$$\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial v}{\partial y'} = 0.$$

Valitaan

$$v = (y'(x))^2 + 2f(x)y(x),$$

jolloin

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} &= 2f(x), \\ \frac{\partial v}{\partial y'} &= 2y' \\ \frac{d}{dx} \frac{\partial v}{\partial y'} &= 2y''. \end{aligned}$$

Lagrangen yhtälö on siis

$$2f(x) - 2y''(x) = 0$$

eli

$$y'' = f(x).$$

Differentiaaliyhtälö

$$y'' = f(x)$$

voidaan siis ratkaista myös variaatiotehtävänä etsimällä minimi funktionaalille

$$F[v] = \int y'^2 + 2f(x)y dx$$

Vastaavasti esimerkiksi Poissonin yhtälö

$$\nabla^2 u = f(x, y, z)$$

voidaan ratkaista minimoimalla funktionaalia

$$F[u] = \int \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 2f(x, y, z)u \right) dx dy dz.$$

Approksimoidaan ratkaisua kantafunktioiden ϕ_i lineaarikombinaatio-
na:

$$v = \sum_j a_j \phi_j,$$

jolloin minimoitava funktionaali on

$$F[v] = \int \left(\left(\sum_j a_j \phi_j' \right)^2 + 2f(x) \sum_j a_j \phi_j \right) dx.$$

Minimi saadaan yhtälöistä

$$\frac{\partial F[v]}{\partial a_i} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[v]}{\partial a_i} &= \int \left(2\phi_i' \left(\sum_j a_j \phi_j' \right) + 2f(x)\phi_i \right) dx \\ &= 2 \sum_j a_j \int \phi_i' \phi_j' dx + 2 \int f(x)\phi_i dx, \end{aligned}$$

josta

$$\sum_j a_j \int \phi_i' \phi_j' dx = - \int f(x)\phi_i dx.$$

Saadaan yhtälöryhmä

$$Fa = b,$$

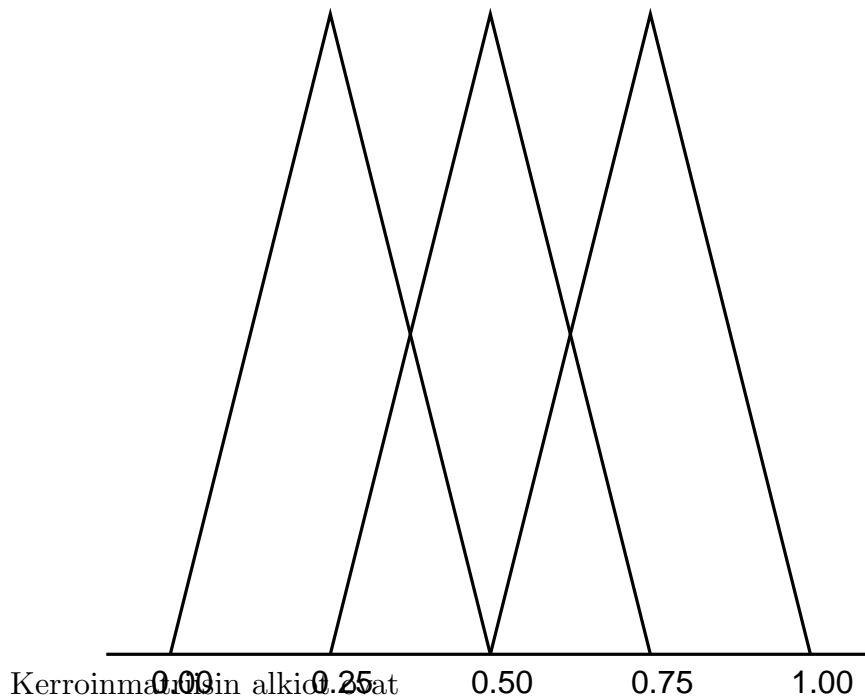
missä

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \int \phi_i' \phi_j' dx, \\ b_i &= - \int f(x)\phi_i dx. \end{aligned}$$

Esimerkki: yritetään ratkaista yhtälö $y'' = x$ reunaehdoilla $y(0) = y(1) = 0$.

Valitaan kantafunktioiksi

$$\phi_i = \begin{cases} 1 + \frac{x-x_i}{h}, & \text{kun } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ 1 - \frac{x-x_i}{h}, & \text{kun } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{muuten} \end{cases}$$



$$\int \phi_i' \phi_j' dx = \begin{cases} -\frac{1}{h}, & \text{kun } i = j \pm 1, \\ \frac{2}{h}, & \text{kun } i = j, \\ 0, & \text{muuten} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f \phi_1 dx &= \int_0^h x \left(1 + \frac{x-h}{h}\right) dx + \int_h^{2h} x \left(1 - \frac{x-h}{h}\right) dx \\ &= \frac{h^2}{3} + \frac{2h^2}{3} = h^2, \end{aligned}$$

$$\int_0^1 f \phi_2 dx = 2h^2,$$

$$\int_0^1 f \phi_3 dx = 3h^2.$$

Valitaan yksinkertaisuuden vuoksi $h = 0.25$, jolloin kantafunktioita on vain kolme.

Minimointitehtävästä saadaan yhtälöryhmä

$$\frac{1}{0.25} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = -0.25^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Tämän ratkaisu on

$$a = \begin{pmatrix} -0.0391 \\ -0.0625 \\ -0.0547 \end{pmatrix}.$$

Esimerkiksi $y(0.5) = a_2\phi_2(0.5) = a_2 = -0.0625$.

Yhtälön tarkka ratkaisu on $y = \frac{1}{6}(x^3 - x)$, josta $y(0.5) = -0.0625$.