Satunnaisluvuista

Kankaala (1993): *Monte Carlo Simulations*, CSC Research Reports R03/93, CSC.

Knuth (1981): *Seminumerical Algorithms*, vol 2 of *The Art of Computer Programming*, Addison-Wesley.

Press, Teukolsky, Vetterling, Flannery: *Numerical Recipes*, Cambridge University Press.

"We guarantee that each number is random individually, but we don't guarantee that more than one of them is random."

Satunnaislukujen (oikeammin pseudosatunnaislukujen) jono on deterministinen. Samoilla alkuarvoilla saadaan aina sama lukujono. Alkuarvo voidaan yleensä valita.

Lineaarinen kongruenssimenetelmä

$$X_{i+1} = aX_i + b (\mathrm{mod}\ m), a, b, m \in \mathbf{N}$$

Multiplikatiivisessa menetelmässä $b = 0$, sekamenetelmässä $b > 0$.

Luvut toistuvat viimeistään m numeron kuluttua. Jos vakiot on valittu huonosti, jakso voi olla paljon lyhempi.

Peräkkäisten lukujen korrelaatio: Jos valitaan n lukua kerrallaan esittämään pisteen paikkaa n-ulotteisessa avaruudessa, pisteet eivät täytä koko avaruutta, vaan sijoittuvat $n - 1$-ulotteisille hypertasoille, joita on korkeintaan $m^{1/k}$ kappaletta, usein paljon vähemmän.

Satunnaisluvun vähiten merkitsevät bitit ovat vähiten satunnaisia.

Satunnaislukua ei pidä paloitella osiin; osat eivät ole yhtä satunnaisia.

Fortran 90:ssä satunnaislukuja voi tuottaa aliohjelmalla

```
call random_number (v)
```

Tässä `v` on taulukko, joka täytetään satunnaisluvuilla. Luvut jakautuvat tasaisesti välille [0, 1).

Satunnaislukugeneraattori voidaan alustaa

```
call random_seed (n)
```

missä `n` on kokonaisluku.

Muodostetaan satunnaisluvuista kokonaislukujen jono

$$I_i = \lfloor K X_i \rfloor, i = 1, \ldots, n$$

- Lukujen pitää jakautua tasaisesti: kukin luku esiintyy todennäköisyydellä $1/K$ eli noin n/K kertaa (voidaan testata χ^2-testillä)
- Jokaisen peräkkäisistä luvuista muodostetun lukuparin (a, b) pitää esiintyä todennäköisyydellä K^{-2} kertaa, jne.
- luvut X_i ja X_{i+k} eivät korreloi keskenään millään $k > 1$.

Muut jakaumat

Jos X on jakautunut tasaisesti välille [0, 1], satunnaismuuttuja $a + X(b-a)$ jakautuu tasaisesti välille $[a, b]$.

Olkoon F mielivaltaisen todennäköisyysjakauman kertymäfunktio. Jos X on tasaisesti jakautunut välille [0, 1] ja Y ratkaistaan yhtälöstä

$$F(Y) = X,$$

saadaan muuttuja Y, joka noudattaa annettua jakaumaa:

$$Y = F^{-1}(X).$$

Jos kertymäfunktion käänteisfunktio on helposti laskettavissa, sen avulla saadaan haluttua jakaumaa noudattavia satunnaislukuja.

Eksponenttijakauma

Eksponenttijakauman kertymäfunktio on

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = 1 - e^{-kx},$$

joten

$$F^{-1}(y) = -\frac{1}{k}\ln(1-y),$$

missä k on jakauman odotusarvo.

Jos X on tasaisesti jakautunut välille $[0,1]$, samoin on $1-X$, joten

$$Y = -\frac{1}{k}\ln X$$

noudattaa eksponenttijakaumaa.

- Radioaktiivinen hajoaminen. Jos puoliintumisaika on T, jokin atomi hajoaa viimeistään ajan t kuluttua todennäköisyydellä

$$1 - 2^{-t/T} = 1 - e^{-t\ln 2/T}$$

eli atomi hajoaa aikavälillä $[t, t+dt]$ todennäköisyydellä

$$p(t)\,dt = \frac{\ln 2}{T} e^{-t\ln 2/T}\,dt$$

- Satunnaiskulku. Jos keskimääräinen vapaa matka on λ, todennäköisyys päästä etäisyydelle s on

$$p(s)\,ds = \frac{1}{\lambda} e^{-s/\lambda}\,ds$$

Normaalijakauma

(0,1)-normaalijakauman tiheysfunktio

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Normaalijakautuneiden satunnaislukujen tuottamiseen on useita keinoja:

1) Ratkaistaan numeerisesti kertymäfunktion käänteisfunktio. Hieman työlästä.

2) Satunnaismuuttujien summa lähenee normaalijakaumaa, joten normaalijakautuneita satunnaislukuja saadaan laskemalla yhteen muutamia tasaisesti jakautuneita satunnaislukuja.

3) Box-Mullerin menetelmä.

Jos x_1 ja x_2 ovat satunnaismuuttujia ja $y_1 = y_1(x_1, x_2)$ $y_2 = y_2(x_1, x_2)$, muuttujien (y_1, y_2) jakauma on

$$p(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2 = p(x_1, x_2) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| dy_1\, dy_2.$$

Olkoot x_1 ja x_2 jakautuneet tasaisesti välille $[0, 1]$ ja

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{-2 \ln x_1} \cos 2\pi x_2, \\ y_2 &= \sqrt{-2 \ln x_1} \sin 2\pi x_2, \end{aligned}$$

eli

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{-(y_1^2 + y_2^2)/2}, \\ x_2 &= \frac{1}{2\pi} \arctan \frac{y_2}{y_1}. \end{aligned}$$

Jacobin determinantti on

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial(x_1)}{\partial(y_1)} & \frac{\partial(x_1)}{\partial(y_2)} \\ \frac{\partial(x_2)}{\partial(y_1)} & \frac{\partial(x_2)}{\partial(y_2)} \end{vmatrix} = \\ -\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y_1^2/2} \right) & \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y_2^2/2} \right). \end{aligned}$$

Tämä on kahden normaalijakauman tiheysfunktion tulo: y_1 ja y_2 ovat kumpikin normaalijakautuneita.

Hylkäysmenetelmä

Olkoon p halutun jakauman tiheysfunktio ja f jokin vertailufunktio siten, että $f(x) \geq p(x)$ kaikilla x.

Valitaan satunnaisluku x, joka noudattaa jakaumaa f $(x = F^{-1}(X))$.

Valitaan toinen satunnaisluku y, joka on jakautunut tasaisesti välille $[0, f(x)]$. Jos $y < p(x)$, luku hyväksytään, muuten se hylätään ja yritetään uudestaan.

Satunnaiskulku (random walk)

Esimerkiksi säteilyn eteneminen väliaineessa.

Tunnetaan keskimääräinen vapaa matka. Säteen kulkema matka ennen sen osumista hiukkaseen noudattaa eksponenttijakaumaa.

Sironneen säteen suuntajakauma saadaan sirontafunktiosta.

Ulostulevan säteilyn karkea jakauma saadaan jo pienehköllä säteiden määrällä. Jakaumaa voidaan tarkentaa tilanteen mukaan.

Säteen jäljitys (ray tracing, ray casting)

Usein tunnettu geometria. Säteen osumakohta kappaleeseen ratkaistaan deterministisesti. Siroavalla säteilyllä voi olla erilaisia komponentteja:

- spekulaarinen (peilimäinen) heijastus

- diffuusi osa (jonkin sirontalain mukaan)

- kappale itsessään voi olla valaiseva (luminenssi)

Kutakin sädettä voidaan seurata muista riippumatta. Menetelmät sopivat hyvin moniprosessorikoneille. Eivät sovellu vektoriprosessoreille.